5/11/19

ΠΑΡΑΔ: Ο χώρος των συνεχών συν/σεων F, σ' ένα διάστημα $[a,b]$.

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f^*(x) g(x) dx = \int_a^b f g dx$$

"Πληρότητα δ.χ."

Παρατήρηση: Είναι οποιοσδ. N-διάστατος δ.χ. που ορίζεται στο σύνολο των μιγαδικών $\mathbb{C}$, ή των πραγματικών $\mathbb{R}$, είναι πλήρης.

Έστω μια βασική ακολουθία διαν/των $\{|f_n\rangle\}_{n=1,2,\dots}$

Έστω είναι N-διάστατος δ.χ. αν $\{|e_i\rangle\}_{i=1,2,\dots,N}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του χώρου τότε ισχύει ότι:

$$|f_n\rangle = \sum_{i=1}^{N} f_i^{(n)} |e_i\rangle \quad (*)$$

Αφού η $|f_n\rangle$ είναι βασική ακολουθία,

$$\rho^2(|f_n\rangle, |f_m\rangle) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

αλλά,

$$\rho^2(|f_n\rangle, |f_m\rangle) = (\langle f_n| - \langle f_m|)(|f_n\rangle - |f_m\rangle) \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{N} |f_i^{(n)} - f_i^{(m)}|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

Τότε θα ισχύει ότι: $|f_i^{(n)} - f_i^{(m)}| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$, για δοσμένο i

η ακολουθία μιγαδικών αριθμών $\{f_i^{(n)}\}$ είναι μια βασική ακολουθία κ' κατά συνέπεια θα συγκλίνει σ' ένα f_i.

Έστω ότι: $\lim_{n\to\infty} f_i^{(n)} = f_i$ τότε κατασκευάζουμε το διάν/μα $|f\rangle = \sum_{i=1}^{N} f_i |e_i\rangle$

αυτό είναι διάν/μα του N-διάστατου χώρου.

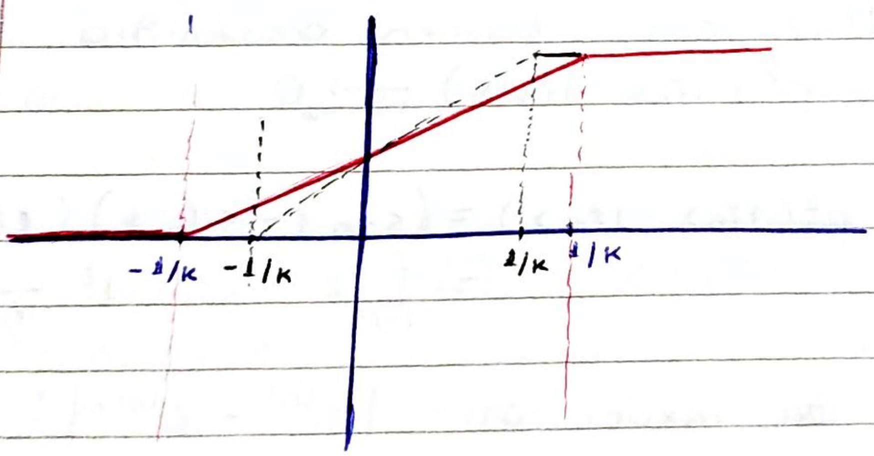
Άρα $\rho^2(|f\rangle, |f_n\rangle) = \sum_{i=1}^{N} |f_i - f_i^{(n)}|^2 \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$

δηλ. $\lim_{n\to\infty} \rho^2(|f\rangle, |f_n\rangle) = 0$ ή $|f_n\rangle \xrightarrow[\text{ισχυρά}]{n\to\infty} |f\rangle$

<u>Παρατήρηση</u>: Ανάλογο συμπέρασμα δεν ισχύει για τυχαίο απειροδιάστατο χώρο H, όπως φαίνεται στο εξής παράδειγμα:

<u>**ΠΑΡΑΔ**</u>: Έστω το διάστημα $[-1,1]$, $w(x) = 1$.
Θεωρούμε την ακολ. συνεχών συν/σεων

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & 1/k < x \le 1 \\ \dfrac{kx+1}{2}, & -\frac{1}{k} < x \le \frac{1}{k} \\ 0, & -1 \le x \le -1/k \end{cases}$$



$\Downarrow$

$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = H(x)$

Μπορώ ν.δ.ο. $\lim_{k,\ell\to\infty} \int_{-1}^{1} |f_k(x) - f_\ell(x)|^2 dx = 0$ ή

$\rho(|f_k\rangle, |f_\ell\rangle) \xrightarrow{k,\ell\to\infty} 0$

Δηλ. η $|f_k\rangle$ είναι μια ακολουθία διαν/των που συγκλίνει στη μέση τιμή.
Το όριο όμως δεν μπορεί να είναι μια συνεχής συν/ση.
Θεωρούμε τη συν/ση $f(x) = 1$, $x \in [0,1]$, τότε

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^1 |f(x) - f_k(x)|^2 dx = 0$$

δηλ. για $x \in [0,1]$ η $f_k(x) \xrightarrow[\text{ισχυρά}]{k \to \infty} f(x)$

Επίσης $\lim_{k \to \infty} \int_{-1}^{0} |f(x) - f_k(x)|^2 dx = 0$, όταν η $f(x) = 0$, $x \in [-1,0]$

δηλ. για $x \in [-1,0]$ η $f_k(x) \xrightarrow[\text{ισχυρά}]{k \to \infty} f(x)$

Όμως η $f(x)$ δεν είναι συνεχής συν/ση στο $x \in [-1,1]$

ΑΡΑ: ο χώρος μου δεν είναι <u>πλήρης</u>.

$$\Downarrow$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω ότι $\exists$ ορθοκανονική βάση $\{|e_i\rangle\}_{i=1,2,\dots}$ σ' ένα χώρο H, που είναι πλήρης. Τότε η ακολουθία των διαν/των $|S_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} (\langle e_i | f\rangle) \cdot |e_i\rangle$, $|f\rangle \in H$

$\langle f | f\rangle < \infty$ έχει ως όριο το διάνυσμα $|f\rangle$, δηλ.

$$\lim_{n \to \infty} \rho(|f\rangle, |S_n\rangle) = 0$$

Δηλ. το θεώρημα λέει ότι μπορούμε να γράψουμε την

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \cdot e_i(x), \qquad f_i = \langle e_i | f\rangle$$

Θα πρέπει να πληρούνται οι προϋποθέσεις:

1) Τα $e_i(x)$, $i = 1, 2, 3, \dots$ να αποτελούν βάση, δηλ. πλήρες ορθοκαν. σύστημα
2) $\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^2 < \infty$
3) Ο χώρος H να είναι πλήρης

Τότε οι συνιστώσες, f_i, λέγονται συντελεστές Fourier, κ. ισχύει η ισότητα του Parseval.

$$\langle f | f \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^2$$

Παρατήρηση: Ο χώρος F, δεν είναι πλήρης. Θα πρέπει να συμπληρωθεί με τις συν/σεις που παρουσιάζουν πεπερ. αριθμό ασυνεχειών. Ένας τέτοιος χώρος είναι ο χώρος των τετραγωνικά ολοκλ/σιμων συν/σεων, f(x), τ.ω.

$$\int_a^b |f(x)|^2 \cdot w(x)\, dx < \infty \quad (*)$$

Ο χώρος (*) συμβολίζεται $L^2_w(a,b)$.
Τότε ισχύει το:

ΘΕΩΡΗΜΑ R-F: Ο χώρος των τετραγωνικά ολοκλ/σιμων συν/σεων, δηλ. ο χώρος που ισχύει η (*), είναι πλήρης.

Παρατήρηση: Το Θ. εξασφαλίζει ότι η $\sum_{i=1}^{\infty} (\langle e_i | f \rangle) \cdot | e_i \rangle$ συγκλίνει στη μέση τιμή, δηλ. στην $f(x) \in L^2_w$

Είδη συγκλίσεων - φαινόμενο Gibbs

Σε πολλά προβλήματα έχουμε χώρο συναρτήσεων κ. ένα ορθοκανονικό σύστημα $\{|e_i\rangle\}_{i=1,2,\dots}$ σ' αυτόν τον χώρο. Είναι πολλές φορές πιο εύκολο να αντικαταστήσουμε την $f(x)$ μ' ένα πεπερ. άθροισμα

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i e_i(x),$$

το οποίο πλησιάζει όσο κοντά θέλουμε τη μέση τιμή, $f(x)$, με την έννοια:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(x) - S_n(x)|^2 w(x)\,dx = 0$$

χωρίς όμως να μας ενδιαφέρει αν η ακολουθία $S_n(x)$ συγκλίνει σημείο προς σημείο στην $f(x)$. Αυτό λοιπόν επιτυγχάνεται όταν οι συντελεστές, F_i, μπορούν να γραφούν ως:

$$F_i = \langle e_i | f\rangle = \int_a^b e_i^*(x) f(x) w(x)\,dx$$

δηλ. να ισχύουν οι προϋποθ. των προηγ. θεωρημ.

- **Ασθενής σύγκλιση**: Η $|f_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ασθενώς}} |f\rangle$, $|f_n\rangle \in H$, $|f\rangle \in H$

αν $\exists |g\rangle \in H$ τ.ω. $\lim_{n\to\infty}\langle g|f_n\rangle = \langle g|f\rangle$

Τότε την ονομάζουμε ασθενή σύγκλιση

- **Σύγκλιση σημείο προς σημείο**: Η $f_n(x)$ συγκλίνει σημείο προς σημείο στην $f(x)$ αν για $x\in[a,b]$ κ. $\forall \varepsilon>0$, $\exists N_0(x,\varepsilon)>0$ τ.ω. για $n > N_0(x,\varepsilon)$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

▸ **Ομαλή σύγκλιση**: Η $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ είναι ομαλή, αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_0(\varepsilon)$ (ανεξ. αυτού του x) τ.ω. για $n > N_0(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Μπορούμε ν.δ.ο. αν η σύγκλιση είναι ομαλή:

a) Το όριο της ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συν/ση

β) Μπορούμε να παραγ. μια σειρά ως:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i e_i(x)$$

$$\Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i e_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \frac{de_i(x)}{dx}$$

Παρατήρηση: 1) Η ισχυρή σύγκλιση $\Rightarrow$ ασθενή σύγκλιση

2) Η ασθενής σύγκλιση $\not\Rightarrow$ ισχυρή σύγκλιση

▸ **ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ GIBBS**

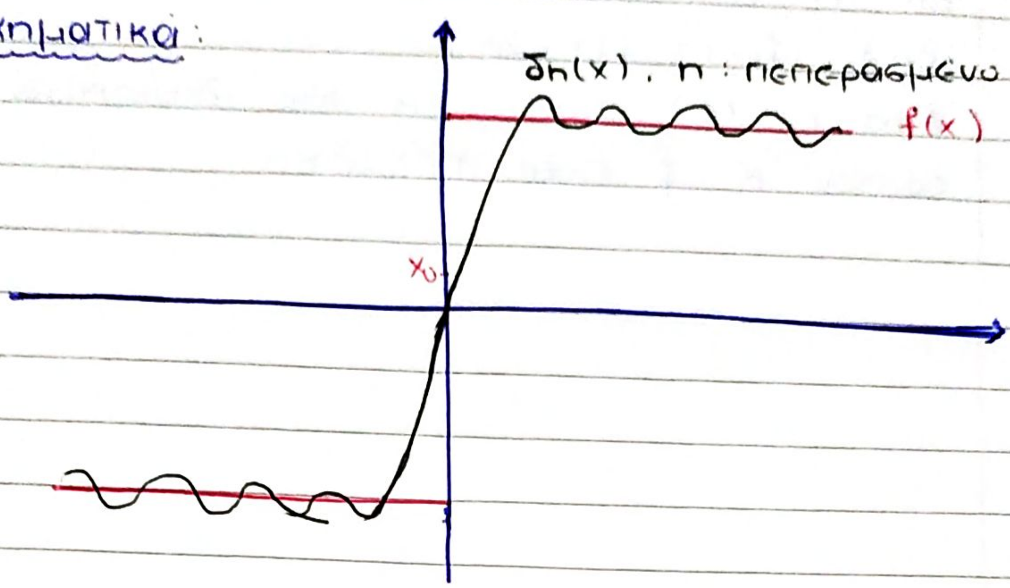
Μία τετραγωνικά ολοκλ/σιμη κατά τμήματα συνεχής συν/ση μπορεί να αναπτυχθεί σε ορθοκανονικές συν/σεις, δηλ. $\sum_{i=1}^{n} f_i e_i(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$, $f_i = \langle e_i | f \rangle$

Οι $e_i(x)$ συνεχείς κ. ομαλές συν/σεις, ενώ η $f(x)$ έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών (πεπερασμένα άλματα)

Στα σημεία ασυνέχειας της $f(x)$, η συν/ση $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i(x)$, δεν μπορεί να προσεγγίσει καλά την $f(x)$ όσο μεγάλο κ. αν είναι το n (n πεπερασμένο). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η $f(x)$ είναι ασυνεχής στο x_0, οπότε

$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$ απειρίζεται, ενώ η $\left.\frac{dS_n(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{de_i(x)}{dx}$

Σχηματικά:



"Σειρές $\boxed{\text{Fourier}}$" SOS κι για το τέλος

Εδώ οι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις ορίζονται σ' ένα διάστημα της μορφής $[-\pi, \pi]$ ή $[0, 2\pi]$ το ορθοκανονικό σύστημα παίρνει τη μορφή:

α) $e_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx}$, $m \in \mathbb{Z}$, $i^2 = -1$, ή

β) $c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $c_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(mx)$, $s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sin(mx)$,

$w(x) = 1$ $m = 1, 2, \dots$

Παρατ.: Μιγαδική αναπαράσταση

Μπορούμε να γράψουμε $f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e_m(x)$, (1)

$$f_m = \int_{-\pi}^{\pi} e_m^*(x) f(x)\, dx$$

$$e_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{imx}$$

$$e_m^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-imx}$$

Παρατήρηση: Η ανάπτυξη κατά Fourier της (1) παραμένει αναλλοίωτη αν $x \to x + 2\pi$ με προϋπόθεση ότι η $f(x)$ είναι περιοδική συνάρτηση,
δηλ. $f(x) = f(x+2\pi)$.
Άρα η (1) ισχύει κ. στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ εφόσον η f είναι περιοδική.